***Понятие непрерывной случайной величины***

Непрерывной случайной величиной (НСВ) называется случайная величина , имеющая абсолютно-непрерывное распределение вероятностей, определяемое функцией распределения:



и плотностью распределения:



НСВ имеет следующие основные числовые характеристики:

• среднее значение:



• дисперсия:



На практике для описания НСВ используются модельные непрерывные законы распределения с функциональными характеристиками, заданными в параметрическом виде:

Во многих практических задачах выборку наблюдений нельзя считать однородно, поскольку выборочные наблюдения соответствуют не одной, а нескольким моделям. Распределение такой выборки описывается смесью распределений. В связи с этим, актуальной задачей является задача моделирования смеси распределений.

Основными методами построения моделирующих алгоритмов для непрерывных законов распределения являются: метод обратной функции, метод исключения и метод функциональных преобразований.

В приложениях часто возникает задача моделирования НСВ в условиях априорно неопределенности, когда плотность неизвестна. В этих случаях может осуществляться моделирование СВ с заданной гистограммой или моделирование СВ с заданным полигоном частот. Гистограмма и полигон частот выступают как оценки плотности, построенные по имеющейся выборке экспериментальных данных.

***Методы моделирования непрерывной случайной величины***

1. ***Метод обратной функции***

Метод обратной функции является одним из универсальных методов моделирования НСВ ξ с заданной плотностью и функцией распределения .

Пусть – строго монотонная возрастающая функция. Найдем обратную функцию , решая относительно х следующее уравнение: . Известно, что если α – БСВ, то СВ ξ, определяемая выражением: , имеет заданную плотность (функцию распределения ).

Таким образом, имеет место следующий алгоритм моделирования НСВ:

1. Моделируется реализация БСВ ;
2. Принимается решение о том, что реализацией СВ является величина *х*, определяемая по формуле: ;
3. Коэффициент использования БСВ *k* = 1.

На этом методе основываются алгоритмы моделирования НСВ с распределениями: равномерным, экспоненциальным, Лапласа, Вейбулла-Гнеденко, Коши, логистическим, гамма-распределением.

1. ***Метод исключения***

В случаях, когда плотность распределения моделируемой НСВ имеет сложны аналитический ряд, нахождение функции распределения , а тем более обратной функции затруднительно, что делает невозможным применение метода обратной функции для моделирования СВ .

В этом случае может оказаться полезным другой универсальный метод моделирования, называемый методом исключения. Он заключается в следующем.

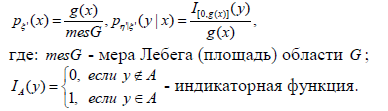
Обозначим: – область, ограниченную кривой и осью абсцисс. Определим мажорирующую функцию и область . Заметим, что мажорирующая функция должна иметь значительно более простой аналитический вид, чем . Область *G* при этом также имеет простой вид (треугольный, прямоугольный), позволяющий легко моделировать случайный вектор , равномерно распределенный в области *G* (например, при помощи метода обратной функции).

Алгоритм моделирования, основанный на методе исключения, включает следующие этапы:

1. Подбор мажорирующей функции ;
2. Моделирование реализации случайного вектора с равномерным распределением в области *G* ;
3. Принятие решения о том, что реализацией является при выполнении следующего условия:

Запись означает, что точка с координатами принадлежит области . Точки , не попавшие в , исключаются из рассмотрения. Отсюда и происходит название метода.

Для моделирования случайного вектора с равномерным распределением в области *G* полагают:



Моделирование СВ и (при условии, что ) осуществляется по методу обратной функции.

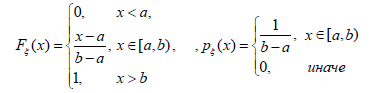
Средний коэффициент использования БСВ , где *l* – количество БСВ (обычно *l =* 2), используемых для получения одной реализации *(x, y)* случайного вектора .

Данный метод используется для построения одного из алгоритмов гамма-распределения.

***Алгоритмы моделирования для основных непрерывных распределений***

1. ***Равномерное распределение***

НСВ ξ имеет равномерное распределение на интервале [a, b), обозначаемое *R(a, b)*, если функция и плотность распределения ξ определяются соотношениями:



Для произвольных значение параметров распределения a, b распределение *R(a, b)* обобщает распределение *R(0, 1)* БСВ α.

Среднее значение: , дисперсия: .

Алгоритм моделирования СВ ξ основан на методе обратной функции. Обратная функция для находится при решении уравнения относительно *х*: .

Далее в соответствии с указанным методом алгоритм моделирования реализации СВ включает два шага:

* моделирование реализации БСВ η
* принятие решения о том, что реализацией ξ является величина *x*:

Коэффициент использования БСВ *k* = 1.

1. ***Одномерное нормальное распределение***

НСВ с плотностью распределения имеет одномерное нормальное распределение , где – среднее значение, – дисперсия.

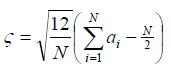
Распределение называется стандартным нормальным распределением, а НСВ -стандартной нормальной (гаусовской) величиной. Функция распределения обозначается Ф(x) и имеет вид:



и называется функцией Лапласа.

Случайные величины ξ и η связаны соотношением: , где – среднее квадратическое (стандартное) отклонение. Таким образом, задача моделирования сводится к моделированию стандартной гаусовской СВ η и применению формулы (23).

Алгоритм моделирования СВ ξ реализуется методом суммирования, основанном на центральной предельной теореме: если – независимые БСВ, то при *N*→∞ случайная величина



распределена асимптотически нормально, так что .

На практике приемлемая точность аппроксимации стандартной гаусовской СВ достигается при N=12. Таким образом, алгоритм моделирования состоит из следующих шагов:

* моделирование N=12 реализацией БСВ
* принятие решения о том, что реализацией СВ является величина x, равная:

Коэффициент использования БСВ

1. ***Лог-нормальное распределение***

НСВ с плотностью распределения



имеет логарифмически-нормальное распределение (лог-нормальное распределение) с параметрами формы (стандартное отклонение СВ lnξ).

Среднее значение и дисперсия определяются формулами:



Очевидно, СВ имеет распределение , если СВ распределена по нормальному закону , причем . И наоборот: если , то СВ .Эта связь распределений лежит в основе моделирующего алгоритма (*m*=exp{μ})

Алгоритм моделирования основан на методе функциональных преобразований и состоит из следующих шагов:

* моделирование z реализации стандартной гаусовской СВ;
* получение y реализацией СВ (где ) по формуле: ;
* вычисление реализации x СВ по формуле:

1. ***Экспоненциальное распределение***

НСВ с функцией и плотностью распределения, определяемыми соотношениями:



имеет экспоненциальное (потенциальное) распределение , где – параметр распределения ()

Среднее значение и дисперсия СВ равны: .

Экспоненциальное распределение можно рассматривать как частный случай распределений:

* гамма - распределения при ;
* Вейбулла-Гнеденко при с = 1.

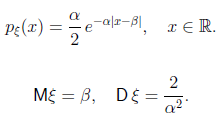
Алгоритм моделирования СВ основан на методе обратной функции. Обратная функция для , определяемой (25), находится при решении уравнения относительно *x*: (26).

Далее в соответствии с методом обратной функции алгоритм моделирования СВ состоит из двух шагов:

* моделирование реализации a БСВ;
* вычисление в соответствии с (26) реализации x СВ , где учтено, что a и a-1 одинаково распределены.

Коэффициент использования БСВ к=1.

1. Распределение Лапласса



1. Распределение Вейбулла-Гнеденко

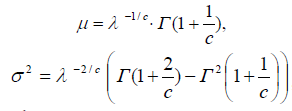
НСВ с плотностью распределения



имеет распределение Вейбулла-Гнеденко , которое имеет вид:



Среднее значение и дисперсия равны:



здесь Г(x)-гамма-функция Эйлера, то есть



Частными случаями распределения с плотностью (31) являются:

1. экспоненциальное распределение при с = 1;
2. распределение Релея, имеющее плотность



при с = 2 и

Алгоритм моделирования СВ основан на методе обратной функции и состоит из следующих шагов:

* моделирование реализации а БСВ;
* принятие решения о том, что реализацией СВ является величина *x*, вычисляемая с учетом (32) по формуле:



Коэффициент использования БСВ к=1.

1. ***Гамма-распределение***

НСВ с плотностью распределения



имеет гамма-распределение с параметрами: - параметр формы; b>0 – параметр масштаба. Здесь *Г(*ν*)* - гамма-функция Эйлера:



Среднее значение и дисперсия равны:

При гамма-распределение совпадает с экспоненциальным: .

Для произвольного целого гамма-распределение называется распределением Эрланга порядка с параметром .

Если – целое число, – независимые случайные величины, распределенные по стандартному экспоненциальному закону , то СВ вида: имеет распределение .

В соответствии с методом обратной функции: – независимые БСВ. С учётом этого из (33) следует:

Если – независимые БСВ, , то СВ вида: имеет распределение .

В лабораторной работе полагалось, что – целое число. Для этого случая алгоритм моделирования описывается формулой (34). Коэффициент использования БСВ .

1. ***Распределение Коши***

НСВ с плотностью распределения (38) имеет распределение Коши *C(m, c)* с параметрами: *c>0* - параметр масштаба; - параметр положения (мода, медиана).

Функция распределения СВ имеет вид:



Известно, что если - независимые стандартные гаусовские величины, то СВ ξ вида имеет распределение Коши *C(0,1)*.

Алгоритм моделирования СВ основывается на формуле (39) и состоит из двух шагов:

* моделирование независимых реализаций СВ ;
* принятие решения о том, что реализацией СВ является величина

Коэффициент использования БСВ *k* = 1.

1. ***Хи-квадрат распределение***

НСВ с плотностью распределения



имеет хи-квадрат распределение с *m* степенями свободы (*m>0* – натуральное число, параметр распределения). Здесь Г(z) – гамма-функция Эйлера.

Среднее значение и дисперсия равны: .

Известно, что, если - – независимые стандартные гаусовские СВ, то СВ (43) имеют плотность распределения (42).

В основе первого алгоритма моделирования СВ лежит свойство (43) : в качестве реализации СВ принимается величина *x*, вычисленная по независимым реализациям СВ по формуле: .

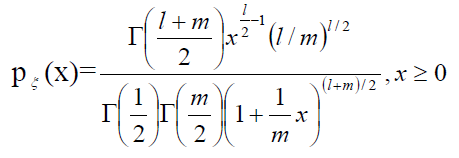
Коэффициент использования БСВ , где – число реализаций БСВ, необходимых для моделирования одной реализации СВ .

Пусть – независимые реализации БСВ, z – независимая от реализация СВ . Второй алгоритм моделирования СВ предполагает, что в качестве реализации СВ принимается величина *x*, вычисляемая по формулам: .

Коэффициент использования БСВ для случаев (44), (45) соответственно равен: .

1. ***Распределение Фишера***

НСВ с плотностью распределения



имеет распределение Фишера (F-распределение) с *l* и *m* числом степеней свободы (*l,m* –натуральные числа, параметры распределения).

Среднее значение и дисперсия ξ ~ равны: .

Пусть . Тогда . Алгоритм моделирования определяется этим соотношением.

***Тесты проверки точности моделирования непрерывных случайных величин***

1. ***Критерий Колмогорова***

Данный критерий позволяет осуществить проверку гипотез в условиях, когда функция распределения модельного закона известна полностью, то есть не зависит от неизвестных параметров. Он основан на анализе мер уклонения эмпирической и модельной функций распределения.

Эмпирическая функция распределения по случайной выборке реализаций СВ ξ определяется по формуле: .

Введём статистику , называемую расстоянием Колмогорова между и .

Известно, что гипотеза *H0* верна и *n*→∞ (практически *n* > 20), то статистика имеет распределение Колмогорова с функцией распределения вида:



Критерий согласия Колмогорова представляет собой следующее решающее правило:

принимается гипотеза: *H0*, если , *H1* в противном случае.

Порог – квантиль уровня распределения Колмогорова, - задаваемый пользователем уровень значимости.

1. ***Критерий хи-квадрат Пирсона***

Данный критерий широко используется в задачах статистического анализа данных для проверки соответствия экспериментальных данных заданному модельному непрерывному или дискретному закону распределения, определяемому функцией распределения . При этом истинные значения параметров могут быть неизвестны. В задачах проверки точности моделирования значения задаются при описании условий экспериментов, поэтому функцию можно считать полностью заданной.

Пусть как и при построении гистограммы вычислены частоты попадания выборочных значений в K ячеек гистограммы. Гипотетические вероятности попадания значений ξ в ячейки гистограммы при истинной гипотезе *H0* и полностью заданной функции равны:



где - границы ячеек гистограммы.

Статистика критерия проверки гипотез (15) имеет вид:



и характеризует взвешенную сумму квадратов уклонений частот от гипотетических значений . Чем больше , тем “сильнее” выборка не согласуется с *H0*.

Статистика (16) имеет, в предположении, что гипотеза *H0* верна,-распределение с *K*-1 степенями свободы.

- критерий Пирсона основан на (16) и имеет вид:



где порог критерия находится из ограничения на ошибку первого рода: и имеет вид , где *G*(.) – функция распределения статистики (16).